UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE FÍSICA

Departamento de Física Teórica

TRABAJO FIN DE GRADO

Radiación gravitacional: modos cuasinormales de estrellas relativistas

Doble Grado en Matemáticas y Física

Autor: Alfonso Palomares Berbel

Dirigido por el Profesor:

Luis Manuel González Romero

Contenido

Capítulo I. Modos cuasinormales 3
Capítulo II. Ecuación de estado de estrellas relativistas 7
Capítulo III. Estrellas de neutrones. Perturbaciones 11
Capítulo IV. Análisis de los modos. Estabilidad 17
Bibliografía 21

Introducción

These amazing observations are the confirmation of a lot of theoretical work, including Einstein's general theory of relativity, which predicts gravitational waves.

Stephen Hawking, 2016

El siglo XX fue testigo de las dos mayores revoluciones de la física de la Era Contemporánea: La Mecánica Cuántica y la Relatividad General. Mientras que la primera de ellas nos hizo comprender que el mundo que nos rodea no se comporta como nuestra intuición presupone cuando las distancias son pequeñas, la segunda modificó para siempre el concepto de tiempo y espacio como algo independiente, homogéneo e imperturbable. El paso del tiempo dejó de ser considerado un tic-tac constante que avanza de forma regular movido por una especie de metrónomo universal. De la mano de Albert Einstein, se comprendió que el tiempo de un objeto medido por un observador depende de la velocidad relativa de ambos (*Relatividad Especial*) y de la distribución de la materia a su alrededor, con la consecuente deformación del espacio y del tiempo (*Relatividad General*). Espacio y tiempo dejaron de ser considerados conceptos independientes y se comprendió que sólo se podía hablar de *espaciotiempo*.

La Relatividad General fue comprobada experimentalmente en 1916 con la explicación teórica de la precesión de la órbita de Mercurio, así como por el efecto de *lente gravitacional* que producen grandes masas sobre galaxias lejanas. Sin embargo, otra prueba experimental reciente de la Relatividad General de Einstein ocurrió en 1993 con la detección indirecta de ondas gravitatorias por Hulse y Taylor en el pulsar binario que lleva su nombre, descubrimiento que les valió el Nobel de Física de ese mismo año. El 11 de febrero de 2016, el equipo de LIGO anunció a la comunidad científica que había detectado directamente las ondas gravitacionales de la fusión binaria estelar de un agujero negro, siendo galardonados Rainer Weiss, Barry C. Barish y Kip S. Thorne con el Premio Nobel de Física 2017. Por tanto, la radiación gravitacional se encuentra en el foco de la actualidad científica e incluso se hizo eco de la primera detección de ésta en la prensa general.

Las ondas gravitacionales son dificiles de detectar debido a que son muy débiles para la mayoría de estrellas. Por ello se buscan en situaciones de colapso gravitatorio de grandes densidades de masa, debido a la alta variabilidad de su campo gravitatorio. En efecto, el cambio que se produce en el campo (que no es instantáneo debido al principio de inmutabilidad de la velocidad de la luz) es lo que conocemos como ondas gravitacionales.

En este trabajo vamos a centrarnos en las ondas gravitacionales producidas por estrellas de neutrones, que son especialmente importantes en su época de formación. En el contexto

de la Relatividad General, aparecen los *modos cuasinormales* (QNM) como perturbaciones (electromagnéticas o gravitacionales) del espaciotiempo que envuelve a la estrella.

En un primer capítulo, vamos a centrarnos en definir los modos cuasinormales, así como en discutir su relevancia física y su relación con la radiación gravitacional.

El estudio de la radiación gravitacional producida por estrellas relativistas es más complicado que el de los agujeros negros, ya que éstas disponen de estructura interna y la ecuación de estado que las rige no se conoce con precisión. Por tanto, en un segundo capítulo trataremos de exponer los distintos modelos existentes para la estructura interna de las estrellas de neutrones.

Con este trabajo previo, podremos estudiar en un tercer capítulo la deformación del espaciotiempo alrededor de una estrella de neutrones al introducir una perturbación. Así, deduciremos las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkov y discutiremos dos casos límite de las ecuaciones de onda que describirán la métrica perturbada.

Finalmente, estudiaremos los distintos tipos de modos cuasinormales, así como la estabilidad de estos en un último capítulo.

Como referencia general, he utilizado un magistral artículo de Kostan D. Kokkotas [KO]. Para el estudio de la ecuación de estado, he consultado el artículo de P. Haensel [HA] así como el de James M. Lattimer [LA]. Finalmente, he usado como apoyo el libro de L. Fernández-Jambrina y L. M. González Romero [FJ]

CAPÍTULO I

Modos cuasinormales

(Our paper is) just a modest introduction to a story which promises to be long, complicated and fascinating.

Thorne y Campollataro, 1967

En esta sección estudiaremos la noción de *modos cuasinormales* y su aplicación al estudio de la radiación gravitacional emitida por estrellas relativistas. La mayor parte de los cuerpos estelares experimenta algún tipo de oscilación (radial o no radial). En la mayoría de los casos, esta oscilación es dificil de detectar, aunque en otros tipos de estrellas ha podido estudiarse. Por ejemplo, la variabilidad de las cefeidas (tanto de temperatura como de diámetro) fue estudiada por Henrietta Swan Leavitt en 1912, encontrando una relación entre el periodo de las oscilaciones y su luminosidad, permitiendo utilizarlas como *candelas estándar* . Sin embargo, la variabilidad de estrellas no relativistas como las cefeidas puede estudiarse con teoría newtoniana y las ondas gravitacionales que emiten son demasiado débiles para ser detectadas. Esto no ocurre para los objetos estelares más compactos: estrellas de neutrones y agujeros negros.

Los sistemas compactos oscilantes clásicos tienen movimientos armónicos en el tiempo preferentes, que podemos escribir (con ω real):

$$\Psi_n(t,x) = e^{i\omega_n t}\Psi_n(x), \quad n = 1, 2, 3.... \tag{I.1}$$

donde Ψ es un campo complejo. Cualquier solución para el movimiento del sistema puede expresarse como superposición de estos *modos normales* :

$$\Psi(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\omega_n t}\Psi_n(x), \quad n = 1, 2, 3.... \tag{I.2}$$

Sin embargo, en este análisis hemos tenido que considerar que nuestro sistema es estable en el tiempo en el sentido de que no se produce disipación de energía. Sin embargo, en sistemas en los que la disipación es importante, la amplitud de las oscilaciones decae con el tiempo y no podemos hablar de modos normales. Sin embargo, podemos definir los modos cuasinormales de forma análoga considerando ciertos movimientos preferentes que podemos aproximar como:

$$\Psi_n(t,x) \simeq e^{-\omega''_n t} cos(\omega'_n t)\Psi_n(x), \quad n = 1, 2, 3.... \tag{I.3}$$

donde ahora ω'_n es la frecuencia de la oscilación y ω''_n es la tasa de decaimiento. De forma compacta, podemos escribir:

$$\Psi_n(t,x) \simeq \Re(e^{i\omega_n t})\Psi_n(x), \quad n = 1,2,3.... \tag{I.4}$$

con $\omega_n = \omega_n' + i\omega_n''$. Los modos cuasinormales aparecen en diversas áreas de las matemáticas y de la física entre las que se encuentran en particular la teoría cuántica de campos relativista, la gravedad cuántica de bucles y por supuesto la radiación gravitacional. Por ejemplo y para profundizar en el estudio de los modos cuasinormales, consideremos la ecuación de una onda con un potencial en una dimensión:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\Psi(x,t) = 0 \tag{I.5}$$

con $V \geq 0$ que se anula para $|x| > x_0$, que tiene solución única una vez fijadas las condiciones iniciales $\Psi(0,x)$ y $\partial_t\Psi(0,x)$. En efecto, puede demostrarse que no es necesario fijar las condiciones de contorno en el infinito para conocer la evolución temporal del sistema (usando teoría de ecuaciones en derivadas parciales). El espectro energético es continuo y no existen autofunciones cuyo módulo al cuadrado sea integrable. Sin embargo, todas las soluciones determinadas por datos con soporte compacto están acotadas: $|\Psi(t,x)| < C$. Por tanto, podemos usar la transformada de Laplace para representar estas soluciones y tenemos:

$$\hat{\Psi}(s,x) = \int_0^\infty dt\ e^{-st}\Psi(t,x) \tag{I.6}$$

que, utilizando teoría de Laplace satisface la ecuación diferencial:

$$s^2\hat{\Psi} - \hat{\Psi}'' + V\hat{\Psi} = s\Psi(0,x) + \partial_t\Psi(0,x) \tag{I.7}$$

con la prima denotando derivada con respecto a x. Como Ψ está acotada, $\hat{\Psi}$ es analítica para $s > 0$ real y puede extenderse de forma analítica al semiplano complejo $\Re(s) > 0$.

Ahora, como el potencial se anula para $|x| \geq x_0$, podemos encontrar dos soluciones para la ecuación homogénea $s^2\hat{\Psi} - \hat{\Psi}'' + V\hat{\Psi} = 0$:

$$f_+ = e^{-sx} \ \ para \ \ x > x_0 \quad y \quad f_- = e^{+sx} \ \ para \ \ x < -x_0 \tag{I.8}$$

Por tanto, en general tenemos que f_+ es una combinación lineal de las dos exponenciales y lo mismo ocurre con f_-, es decir:

$$f_\pm = a_\pm(s)e^{-sx} + b_\pm(s)e^{sx} \tag{I.9}$$

Con este trabajo previo, ya podemos analizar los modos cuasinormales soluciones de esta ecuación diferencial. En efecto, podemos definir las frecuencias cuasinormales como los números complejos s_n para los que las funciones f_+ y f_- son linealmente dependientes, es decir:

$$f_+(s_n,x) = c(s_n)f_-(s_n,x) \tag{I.10}$$

Veamos por qué nos interesan los modos cuasinormales de esta ecuación. Como las dos funciones f_+ y f_- son linealmente dependientes, tenemos que su wronskiano se anula y puede comprobarse que una solución de la ecuación (I.7) es:

$$\hat{\Psi}(s,x) = \int_{\infty}^{\infty} G(s,x,x') \left(s\Psi(0,x') + \partial_t \Psi(0,x') \right) dx' \tag{I.11}$$

donde $G(s,x,x')$ es una función de Green y por tanto es inversamente proporcional al wronskiano: para los modos cuasinormales la función de Green es singular.

CAPÍTULO II

Ecuación de estado de estrellas relativistas

Antes de abordar el estudio de los modos cuasinormales de estrellas relativistas, tenemos que estudiar la ecuación de estado (EoS) de estas estrellas. En efecto, como veremos en el Capítulo III, necesitamos especificar una ecuación de estado $p = p(\rho, ...)$ que relacione la presión con la densidad en el interior de la estrella de neutrones para complementar las ecuaciones de conservación del tensor energía-momento y la condición de equilibrio hidrostático.

Sin embargo, la ecuación de estado de una estrella de neutrones no se conoce con seguridad, debido en gran parte a la variedad de modelos sobre el comportamiento de la materia bariónica sometida a grandes presiones y densidades: materia extraña de quarks (los protones y los neutrones se disocian en los quarks que los componen), materia anormal (condensación de piones), Q-materia y plasmas de quarks-gluones... Estos modelos teóricos podrán seguramente ser apoyados o rechazados en los próximos años, cuando tengamos un mayor número de datos que nos permita elaborar una *función de masas* de las estrellas de neutrones, ya que cada modelo predice una masa máxima distinta para las estrellas de neutrones, así como una distribución de masa diferente.

Como primera aproximación, podemos considerar que la estrella relativista se comporta como un gas ideal de Fermi. Usando la Primera Ley de la Termodinámica, podemos asociar la presión con su energía interna, esto es:

$$P = -\frac{\partial E_T}{\partial V} = \frac{2}{5}\rho E_F \tag{II.1}$$

con E_F la energía de Fermi. Usando cálculos clásicos para obtener el número de estados en una caja cúbica de lado L obtenemos:

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2\rho\right)^{2/3} \tag{II.2}$$

Por otra parte, si ahora consideramos mecánica relativista tenemos que la energía de Fermi vale, en el límite ultrarelativista:

$$E_F = \sqrt{(\rho_F c)^2 + (mc^2)^2} - mc^2 \simeq \rho_F c \tag{II.3}$$

con $\rho_F = \hbar\left(\frac{6\pi^2}{g_s}\rho\right)^{1/3}$ y g_s la dimensión del espacio de Hilbert interno (la degeneración). En resumen, el cualquiera de los dos límites (no relativista o ultrarelativista) tenemos:

$$P = K\rho^\Gamma \tag{II.4}$$

con $\Gamma = \frac{5}{3}$ en el primer caso y $\Gamma = \frac{4}{3}$ en el segundo caso, o como se escribe en la mayoría de trabajos:

$$P = K\rho^{1+\frac{1}{n}} \tag{II.5}$$

con n el *exponente politrópico* .

Ahora, vamos a hacer un análisis más meticuloso de las estrellas de neutrones. En efecto, estas estrellas no son uniformes y poseen estructura interna, que podemos separar en corteza y núcleo. Estudiemos en primer lugar la corteza de la estrella de neutrones. Esta se separa en dos subestructuras: la corteza externa y la corteza interna. La corteza externa de la estrella de neutrones está compuesta de núcleos atómicos inmersos en un gas de electrones. La corteza interna se compone de núcleos atómicos inmersos en un gas de electrones y neutrones. La corteza externa se extiende hasta una densidad crítica de $4 \times 10^{11} g/cm^3$ (*neutron drip point*) y la corteza interna hasta una densidad crítica de $4 \times 10^{14} g/cm^3$. Hasta el *neutron drip point* , la ecuación de estado se conoce con bastante precisión usando los datos experimentales de los núcleos ricos en neutrones y la fórmula semi-empírica de masas. A partir de ahí, sin embargo, no se conoce con precisión el comportamiento de la materia. Según el trabajo de Douchin y Haensel de 2001, tenemos la siguiente representación gráfica de la ecuación de estado para la corteza de las estrellas de neutrones:

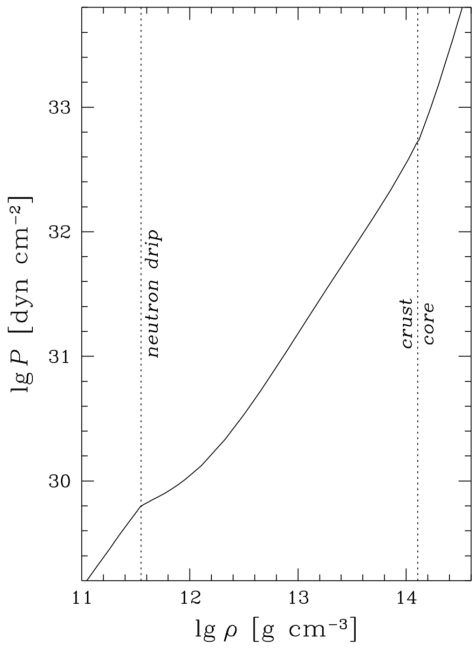

Figura II.0.1: Ecuación de estado de la corteza de una estrella de neutrones. Las lineas verticales se corresponden con el *neutron drip point* y la separación entre corteza y núcleo.

Algunas estrellas de neutrones acretan materia y tienen una corteza más externa for-

mada por materia acretada que tiene una ecuación de estado distinta a la de la corteza externa. Sin embargo, la masa de esta materia acretada es despreciable y no afecta a la ecuación de estado global de la estrella.

Ahora estudiemos el núcleo de una estrella de neutrones. Conforme avanzamos en profundidad, nuestro desconocimiento del comportamiento de la materia aumenta, ya que la presión sigue aumentando. Cuando la densidad de la estrella de neutrones se aproxima a la densidad de un núcleo atómico normal, $\rho_0 = 2,7 \times 10^{14} g/cm^3$, la materia nuclear es un líquido compuesto principalmente de neutrones con un pequeño porcentaje de electrones y protones en el mismo número. Si la energía de Fermi de los electrones supera la energía de reposo del muón, los electrones son remplazados por muones para minimizar la energía del sistema. A este sistema en beta-equilibrio se lo conoce como *materia* $npe\mu$. Teorías más refinadas predicen la condensación de piones y kaones y el desconfinamiento de quarks e implicarían una modificación de la ecuación de estado.

Habiendo analizando con detenimiento la estructura interna de una estrella de neutrones, podemos comenzar el estudio de los modos cuasi-normales.

CAPÍTULO III

Estrellas de neutrones. Perturbaciones

Las pulsaciones de objetos supercompactos son muy importantes en astrofísica debido a que van acompañadas de radiación gravitacional. Las oscilaciones de estrellas de neutrones podrían explicar también la casi periódica variabilidad de las señales detectadas en radiopulsares y erupciones de rayos X. En este capítulo discutiremos las pulsaciones no radiales de las estrellas de neutrones, en particular los distintos modos de pulsación, la excitación de estos modos y la posibilidad de extraer información de la estrella a partir de las ondas gravitacionales detectadas.

Vamos a considerar un espaciotiempo estático y con simetría esférica, que fuera de la estrella puede ser descrito por la solución de Schwarzchild. Por tanto, usaremos la métrica inicial siguiente:

$$ds^2 = g^0_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -e^{v(r)} dt^2 + e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2 \right) \tag{III.1}$$

Entonces nuestra métrica perturbada tendrá la forma siguiente:

$$g_{\mu\nu} = g^0_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{III.2}$$

que implica la variación de las ecuaciones de Einstein:

$$\delta G_{\mu\nu} = 4\pi \delta T_{\mu\nu} \tag{III.3}$$

Dentro de la estrella, asumiendo como primera aproximación que el material estelar se comporta como un fluido ideal, definimos el tensor energía-momento como:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu} \tag{III.4}$$

donde $p(r)$ es la presión y $\rho(r)$ es la densidad de energía total. A partir de la hipótesis de que la estrella de comporta como un fluido ideal, el tensor energía-momento es diagonal (en el sistema de coordenadas esféricas) con autovalores de densidad de energía y presión:

$$T^0_0 = \rho \tag{III.5}$$

y

$$T^j_i = -p \delta^j_i \tag{III.6}$$

Resolviendo las ecuaciones de Einstein $8\pi T_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}$ primero para la componente G_{00}, tenemos:

$$8\pi T_{00} = 8\pi g_{0\mu} T_0^\mu = -8\pi e^{v(r)}\rho = \left(R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R\right) = -\frac{e^{v(r)}}{r^2}\left(1 - \frac{d}{dr} r e^{-\lambda(r)}\right) \tag{III.7}$$

Luego, integrando entre 0 y r:

$$\int_0^r dr' 1 - 8\pi \int_0^r dr' \rho(r') r'^2 = r e^{-\lambda(r)} \tag{III.8}$$

Tenemos:

$$r - 2m(r) = r e^{-\lambda(r)} \tag{III.9}$$

con $m(r)$ la masa dentro del radio r. Por tanto, la masa total de la estrella es $M(R)$. Tenemos:

$$e^{-\lambda(r)} = 1 - \frac{2m(r)}{r} \tag{III.10}$$

Esta es la primera de las Tolman-Oppenheimer-Volkov (TOV) que necesitamos. Ahora, consideramos la componente G_{11} y obtenemos:

$$8\pi T_{11} = 8\pi g_{1\mu} T_1^\mu = 8\pi e^{\lambda(r)} p = \left(R_{11} - \frac{1}{2} g_{11} R\right) = -\frac{1}{r^2}\left(-r\frac{dv}{dr} + e^{\lambda(r)} - 1\right) \tag{III.11}$$

Despejando $\frac{dv}{dr}$:

$$\frac{dv}{dr} = 8\pi e^{\lambda(r)} pr + \frac{e^{\lambda(r)} - 1}{r} \tag{III.12}$$

Sustituyendo $e^{\lambda(r)} = \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1}$:

$$\frac{dv}{dr} = \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1}\left(8\pi pr + \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r} = \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1}\left(8\pi pr + \frac{2m(r)}{r^2}\right) \tag{III.13}$$

Y en definitiva:

$$\frac{dv}{dr} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1}\left(8\pi pr^2 + \frac{2m(r)}{r}\right) \tag{III.14}$$

Para obtener la última (TOV), imponemos la continuidad del tensor energía-momento $\Delta_\mu T_\nu^\mu = 0$ tenemos:

$$0 = \Delta_\mu T_1^\mu = \partial_1 T_1^1 + \Gamma^\alpha_{\alpha 1} T_1^1 - \Gamma^\alpha_{\alpha 1} T^\alpha_\alpha \tag{III.15}$$

y por la condición de isotropía ($\partial_\phi P = 0$ y $\partial_\theta P = 0$) y de estaticidad ($\partial_t P = 0$ y $\partial_t \rho = 0$) tenemos:

$$0 = -\frac{dP}{dr} - \frac{1}{2}\left(P + \rho\right)\frac{dv}{dr} \tag{III.16}$$

Es decir:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{1}{2r^2}\left(P + \rho\right)\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1}\left(8\pi p r^3 + 2m(r)\right) \tag{III.17}$$

Para determinar un modelo estelar, necesitamos las ecuaciones III.10, III.18 y una ecuación de estado, como discutimos en el capitulo anterior. La existencia de una única solución para las ecuaciones de Einstein con una ecuación de estado dada y un valor de para la densidad central fue probada por Rendall y Schmidt en 1991.

Volviendo a nuestra métrica perturbada (III.2 y III.3), podemos asumir una descomposición en armónicos esféricos para cada $h_{\mu\nu}$ de la forma:

$$\Psi(t, r, \theta, \phi) = \sum_{lm} \frac{\Psi_{lm}(r, t)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi) \tag{III.18}$$

Así, el problema perturbativo se reduce a resolver una única ecuación de onda para $\Psi_{lm}(r, t)$. Hay dos clases de vectores armónicos esféricos (polares y axiales) que se construyen con combinaciones de la forma de volumen de Levi-Civita y del operador gradiente que actúa sobre los armónicos esféricos escalares. La diferencia entre estas dos clases de vectores es su paridad. Al actuar sobre ellos el operador paridad π, el esférico armónico de índice l se transforma como $(-1)^l$, las perturbaciones polares (que para estrellas relativistas también se llaman *pares*) también y las axiales (o *impares*) como $(-1)^{l+1}$. Las perturbaciones pares producen deformaciones esferoidales en el fluido y las impares deformaciones toroidales.

Para el caso polar, podemos usar ciertas combinaciones de las perturbaciones de la métrica como incógnitas, y las ecuaciones de campo linealizadas dentro de la estrella son entonces equivalentes a un sistema de tres ecuaciones de onda con incógnitas S, F, H. Para escribir las ecuaciones de onda es conveniente trabajar con otra variable en lugar del radio r, la coordenada radial *tortuga* r_*(del inglés *tortoise radial coordinate*):

$$r_* = r + 2M log\left(\frac{r}{2M} - 1\right) \tag{III.19}$$

donde M es la masa de la estrella. Con este radio, las ecuaciones de onda son:

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 S}{\partial^2 t}+\frac{\partial^2 S}{\partial^2 r_*}+L_1(S,F,l)=0 \tag{III.20}$$

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial^2 t}+\frac{\partial^2 F}{\partial^2 r_*}+L_2(S,F,H,l)=0 \tag{III.21}$$

$$-\frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2 H}{\partial^2 t}+\frac{\partial^2 H}{\partial^2 r_*}+L_3(H,H',S,S',F,F',l)=0 \tag{III.22}$$

donde c_s es la velocidad del sonido en la estrella, y la restricción:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial^2 r_*}+L_4(F,F',S,S',H,l)=0 \tag{III.23}$$

Las funciones lineales L_i dependen del modelo de fondo cósmico y podemos encontrar su forma explícita en fklasdjfaldskfjnasdl. Las funciones F y S corresponden a las perturbaciones del espaciotiempo mientras que la función H es proporcional a la perturbación de densidad y se define únicamente en el interior de la estrella. Denotamos a partir de ahora con una prima la diferenciación respecto de r_*. Tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial r_*}=\left(\frac{\partial r_*}{\partial r}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial r}=\left(1+\frac{1}{\frac{r}{2M}-1}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial r}=\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{\partial}{\partial r}$$

En el exterior de la estrella sólo hay perturbaciones del espaciotiempo (la densidad es nula) y estas perturbaciones pueden describirse con una única ecuación de onda, la *ecuación de Zerilli*:

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 t}\Psi_l+\left(-\frac{\partial^2}{\partial^2 r_*^2}+V_l(r)\right)\Psi_l=0 \tag{III.24}$$

donde el potencial efectivo para perturbaciones polares, obtenido por Zerilli, es:

$$V_l(r)=\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{2n^2(n+1)r^3+6n^2Mr^2+18nM^2r+18M^3}{r^3(nr+3M)^2} \tag{III.25}$$

con:

$$2n=(l+1)(l+2) \tag{III.26}$$

Kind, S., Ehlers, J., and Schmidt demostraron que el sistema de ecuaciones diferenciales que describe el sistema, al que imponemos continuidad en la superficie de la estrella y regularidad en su centro, admite una solución como problema de Cauchy. La restricción III.23 se preserva con el tiempo.

La restricción puede ser eliminada resolviendo la ecuación III.23 para H y poniendo la correspondiente ecuación en L_2. Así, sólo tenemos que resolver dos ecuaciones de onda ligadas para S y F y calcular H usando la restricción a partir de la solución de las dos ecuaciones de onda. Como hemos visto en el capítulo 2, para obtener los modos cuasinormales, hacemos la transformada de Laplace de las dos ecuaciones de onda y obtenemos un sistema

de ecuaciones diferenciales ordinarias de cuarto orden. La función de Green se construye a partir de las soluciones de las ecuaciones homogéneas y su continuación analítica puede tener polos que definan los modos cuasinormales.

Estas ecuaciones son complicadas de resolver, pero podemos estudiar dos casos límite mucho más simples. En primer lugar, utilizaremos la aproximación de campo débil: supongamos que el campo gravitatorio es muy débil, entonces las dos primeras ecuaciones pueden omitirse (ya que $S \to 0$ en esta aproximación) y una ecuación nos basta para describir el sistema. Esta es la aproximación de *Cowling* . Inversamente, podemos considerar que las dos primeras ecuaciones se acoplan de forma débil con la tercera y por tanto podemos ignorar la tercera ecuación. Esta es la aproximación de *Cowling inversa*.

Para el caso axial, las perturbaciones nos llevan a una única ecuación para las perturbaciones espaciotemporales, que describe deformaciones toroidales:

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial^2 t} + \frac{\partial^2 X}{\partial^2 r_*} + \frac{e^\nu}{r^3}\big(l(l+1)r + r^3(\rho - p) - 6M\big) = 0 \tag{III.27}$$

donde $X \sim h_{r\phi}$. Nótese que en el exterior de la estella la presión y la densidad se anulan y obtenemos las ecuaciones III.24 y III.25. Si la estrella no rota y se comporta como un fluido ideal, entonces en aproximación newtoniana las oscilaciones axiales son soluciones triviales de las ecuaciones de las perturbaciones y no existen variaciones de presión o densidad. Sin embargo, observacionalmente este no es el caso y existen campos de velocidad no oscilatorios. Cuando la estrella está en rotación lenta emerge una nueva familia de modos, los modos-r, aunque no los estudiaremos en este trabajo.

CAPÍTULO IV

Análisis de los modos. Estabilidad

Aunque las oscilaciones estelares se han estudiado durante 50 años, hasta el principio del siglo XXI la mayoría de los estudios trataban las oscilaciones con una aproximación newtoniana, ignorando las propiedades dinámicas del espaciotiempo. Se consideraba a este un medio en el que las ondas gravitacionales se propagarían, ignorando así la existencia de *modos espaciotemporales* , en particular los modos-w. Estos modos se caracterizan por tener frecuencias altas y una amortiguación muy rápida. Además, apenas excitan el movimiento del fluido. Se ha comprobado la existencia de estos modos experimentalmente, incluso para oscilaciones axiales. En este capítulo abordaremos el estudio de las dos familias de modos de oscilación: los *modos fluidales* y los *modos espaciotemporales*. Nos centraremos en el caso $l = 2$ y en estrellas sin rotación, a menos que se especifique.

En primer lugar, estudiemos los modos fluidales, que en estrellas sin rotación sólo existen para oscilaciones polares. Los modos fluidales que emiten radiación gravitacional más importante son los modos fundamental, de presión, de gravedad y rotacionales. Esta división la introdujo Cowling y tiene carácter fenomenológico.

El modo-f (fundamental) es un modo *estable* que existe únicamente para oscilaciones no-radiales. La frecuencia es proporcional a la densidad media de la estrella y prácticamente independiente de su estructura interna. En aproximación newtoniana y suponiendo una densidad uniforme tenemos:

$$\omega^2 = \frac{2l(l-1)}{2l+1}\rho(R) \tag{IV.1}$$

Y para $l = 2$:

$$\omega^2 = \frac{4}{5}\rho(R) \tag{IV.2}$$

Esta aproximación requiere de correcciones al considerar diferentes ecuaciones de estado, pero obtenemos valores similares para los distintos modelos. Para una estrella de neutrones usual, los valores para la frecuencia están entorno a $1,5 - 3\ kHz$ y el tiempo de amortiguación es menor que un segundo $0,1 - 0,5\ s$.

Los modos-p (de presión o acústicos) existen para oscilaciones radiales y no radiales. Se llaman así porque la presión sufre fluctuaciones substanciales cuando estos modos son excitados. Estas oscilaciones son principalmente radiales. Las frecuencias para una estrella de neutron típica oscilan entre 4 y 7 kHz (para el primer modo p_1) y su tiempo de amortiguación es de unos pocos segundos.

Los modos-g aparecen porque la gravedad tiende a suavizar las inhomogeneidades del

material estelar a lo largo de las superficies equipotenciales. Los cambios de presión son muy débiles a lo largo de la estrella. Las componentes tangenciales son normalmente dominantes en el movimiento del fluido. Si la perturbación es estable respecto de la convección, entonces los modos-g son estables ($\omega^2 > 0$) y en caso contrario son inestables. Para estrellas de neutrones usuales, su frecuencia no alcanza 1 kHz.

Los modos-r (rotacionales) en una estrella sin rotación son puramente toroidales. Consideremos ahora que la estrella de neutrones tiene rotación no nula. Entonces la frecuencia en el sistema en rotación, a primer orden con la frecuencia de rotación de la estrella Ω es:

$$\omega_r = \frac{2m\Omega}{l(l+1)} \tag{IV.3}$$

y un observador inercial mide una frecuencia:

$$\omega_i = omega_r - m\Omega \tag{IV.4}$$

De estas dos ecuaciones se puede deducir que todos los modos-r con $l \geq 2$ son inestables para la emisión de radiación gravitacional debido al mecanismo de Chandrasekhar-Friedman-Schutz. Esta inestabilidad provoca que, en menos de un año, una estrella de neutrones en rotación rápida se frena hasta acabar en rotación lenta. Esto explica porque los pulsares en rotación lenta son los únicos asociados con remanentes de supernovas.

Ahora, estudiemos los modos espaciotemporales o modos-w. Vamos a considerar tres familias de modos-w: los modos de curvatura, los modos *atrapados* y los modos de interfaz. Los espectros de estos tres modos son distintos pero en cada familia los espectros son similiares para oscilaciones polares y axiales. Por cálculos numéricos estos modos parecen ser estables.

Los modos de curvatura son los modos-w usuales. Son los más importantes para aplicaciones astrofísicas, ya que existen para todas las estrellas relativistas. Su característica principal es el rápido amortiguamiento de sus oscilaciones. Una de sus características principales es la ausencia de movimiento significativo del fluido (esto también ocurre para el resto de modos-w). Para una estrella de neutrones típica, el primer modo-w tiene una frecuencia de entre 5 y 12 kHz y aumenta con el orden del modo. El tiempo de amortiguamiento ronda las décimas de milisegundo y decrece con el orden del modo.

Los modos atrapados existen sólo en estrellas supercompactas ($R < 3M$). Los primeros modos de curvatura se vuelven modos atrapados cuando la estrella se vuelve más y más compacta e incluso el modo fundamental puede comportarse igual. El número de modos atrapados es finito y aumenta con la compacidad de la estrella. Su amortiguamiento es lento debido a que las ondas gravitacionales tienen que penetrar la barrera de potencial. Su frecuencia ronda los cientos de Hz o incluso los kHz. Su tiempo de amortiguamiento ronda las décimas de segundo. Sin embargo, no hay actualmente ningún modelo realista para la ecuación de estado de estrellas de neutrones que prediga estrellas lo suficientemente compactas para que estos modos sean relevantes.

Los modos de interfaz son modos con una amortiguación extremadamente rápida. Parece que sólo hay una cantidad finita de estos modos y son similares a los modos de las

ondas acústicas dispersadas por una esfera rígida. No inducen movimiento del fluido y sus frecuencias están en el rango de 2 a 15 kHz. Su tiempo de amortiguamiento es menor a una décima de milisegundo.

Recopilando los distintos modos estudiados, veamos los valores típicos para una estrella con ecuación de estado politrópica (ecuación II.5) con $N = 1$, $R = 8,86\ km$ y $M = 1,27 M_{\odot}$:

Modo	Frecuencia	Tiempo de amortiguamiento
f	$2,87\ kHz$	$0,11\ s$
p_1	$6,57\ kHz$	$0,61\ s$
g_1	$19,85\ Hz$	años
w_1	$12,84\ kHz$	$0,024\ ms$
w_{II}	$8,79\ kHz$	$0,016\ ms$

Para acabar este capítulo, estudiemos la estabilidad de las oscilaciones para estrellas sin rotación. En relatividad general, esta estabilidad se conoce con precisión para las oscilaciones radiales. Para estrellas estáticas y con simetría esférica, su estabilidad puede determinarse examinando la relación masa-radio para distintos modelos de equilibrio estelar. Las perturbaciones radiales se describen con una ecuación de Sturm-Liouville de segundo orden, con la frecuencia del modo siendo el autovalor ω^2. Para ω real, los modos serán estables y para ω imaginario, los modos serán inestables.

La estabilidad de las estrellas sin pulsaciones radiales se determina con el determinante de Schwarzchild:

$$S(r) = \frac{dp}{dr} - \frac{\Gamma_1 p}{\rho p}\frac{d\rho}{dr} \tag{IV.5}$$

donde Γ_1 es el índice adiabático de la estrella. Cuando S es negativo en alguna región la *fuerza de flotación* es positiva y la estrella es inestable cuando ocurre convección de material estelar, mientras que si S es positivo, la estrella es estable con la convección.

Bibliografía

[KO] Kostas D. Kokkotas y Bernd G. Schmidt: Quasi-Normal Modes of Stars and Black Holes, Living Reviews in Relativity (1999).

[HA] P. Haensel: Equation of state of dense matter and maximum mass of neutron stars, J.-M. Hameury & C. Motch (2003).

[LA] James M. Lattimer: The Nuclear Equation of State and Neutron Star Masses (2013).

[FJ] L. Fernández-Jambrina y L. M. González-Romero: Current Trends in Relativistic Astrophysics (2002).